TITLE:

粉体の対流運動の数値モデル(統計物理ワークショップ,研究会報告)

AUTHOR(S):

田口, 善弘

CITATION:

田口, 善弘. 粉体の対流運動の数値モデル(統計物理ワークショップ,研究会報告). 物性研究 1991, 56(3): 330-340

ISSUE DATE:

1991-06-20

URL:

http://hdl.handle.net/2433/94552

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

粉体の対流運動の数値モデル

東工大理 田口善弘

さて、報告を始めるまえに、読者の皆さんに演習問題をやって頂きましょう。

問:そこの浅い平らな容器(昔懐かしいアルマイトの弁当箱でよい)を用意する。この中に、粒の揃った砂をある厚さで敷き詰める。この容器を強い上下振動下にさらしたとすると何が生じるか?

(1) 振動の影響により砂が固まって一般の固体のように固化する。

(2) 表面上に定在波が出現し定常的に大きく波うつ。

(3) 容器の中央、または片側に砂が盛り上がり、斜面を形成する。

この演習問題の解答は、そのうち明らかになる。

§1. 何故粉体の研究をするのか?

粉体という余りなじみの無い対象を研究する動機について、まず述べたいと思う。本講演で言う「粉体」とは、「砂のように細かい粒子(といってもマクロな大きさ)の集合体」を指すことにしよう。この粉体を研究することがどうして重要なのかと思われるかも知れないが、実は、粉体の研究には色々面白いことがある。例えば、

(1) 新しい物理がある。

固体と流体のはざまの「物質」である。何らかの意味で連続体としての挙動をすることが期待されるが、その性質は、弾性体、粘性体、流体のいずれの挙動とも大きく異なっている。

(2) 工学的応用に重要である。

この点に関しては殆ど何も知らないのであるが、工業原料の形態として、粉、という形態はよくあるものである。(たとえば、セラミックは粉を焼き固めて作る) このため粉体の輸送、保管等と言うのは極めて重要な工学的課題となっている。

(3) 自然災害の原因究明

粉体と言うのは、自然災害によく登場する物質である。たとえば、雪崩、土石流というのは、基本的にはある大きさの粒子の集団でである物質が「流れ落ちる」という流体的挙動をする現象である。また、砂地の上に建てた高層建築が地震の際に倒壊したり、沈んだりすることがあることが知られているが、これは、強い振動下にさらされた砂が流体化する砂壌流動化現象によるものであることが知られている。

このように、粉体の動的性質と言うのは色々な意味で研究に値する重要な課題である。粉体の物理が特殊で些末なことであると思うのは、海に囲まれた島国日本に生まれたからであり、砂漠の民などにとっては大量の液体の集合体よりも大量の砂の集合体の方が身近である、ということも有り得るのである。

§2. どういうことが知られているか[1~5]?

このように、粉体の動力学は、つきない興味のあるテーマであるが、いきなり全てを対象とする研究を行うのは大変であるので、ここでは、粉体の様々な挙動のうち、「対流現象」について考察することにしよう。粉体の対流現象は次のような実験的なセットアップによって観測される（図１）。一辺10cm の正方形程度の断面積を持つ平たい容器に径1mm 以下程度の大きさのそろったガラス玉を厚さ1cm 程度で敷き詰める。これを振動数 $10 \sim 10^2$Hz 程度で上下に駆動する。このときの制御パラメーターは加速度=振幅×周波数の２乗である。この加速度を増大させていくにしたがって、粉体の挙動は図２の様に変化する。加速度が重力加速度よりも小さい間はなにも生じないが、加速度が重力加速度を超えた当たりで斜面が形成されはじめ、対流が生じる。この斜面の斜度θ_{slope}は最初加速度の増大とともに増大するが、ある程度大きくなるともはや、加速度を増大させても増大せず一定値をとるようになる。更に、加速度を増大させると、θ_{slope}は減少に転じ、最終的にはゼロに戻る。この先には、時空カオスが観測されると書かれているが、具体的な記述はない。更に、これに関連して面白いことは、加速度の十分強い領域において斜度θ_{slope}が時間に対して対数で緩和すること、また、対流の開始（または斜面の形成の開始）と同時に表面の流体化現象が開始すること、などである。

実験:セットアップ

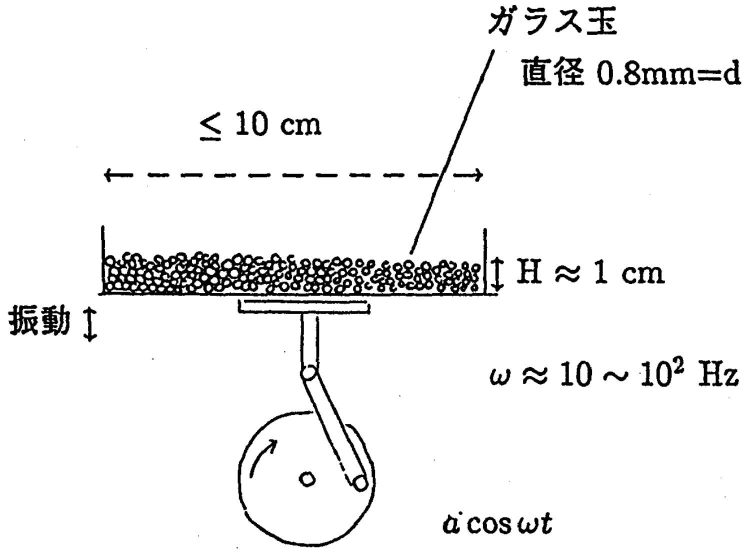

図1

$N=H/d \approx 10 \sim 10^2$

加速度 $\Gamma \approx a\omega^2$: コントロール・パラメーター

十分大きなΓに対して対流が生じる。

図2

$\Gamma = a\omega^2$ } Spatio-temporal chaos

} $\theta = 0$ $\quad \left[\theta(t) \sim \log t\right]$[3,4)]

$\leftarrow 5\Gamma_c$[2)]

} θ 減少 ↘

$\leftarrow 1.5\Gamma_c$[2)]

} θ 一定

} θ 増大 ↗

$\leftarrow \Gamma_c = 12.0$[1)] m/s^2 ⟵ 表面流体化現象開始[5)]

} θ 無

§3. 理論的研究の歴史

粉体の動力学に対する理論的研究は非常に乏しい。この理由は、一つには基礎方程式を導出できていないという点にある。粉体の大きな特徴として静止摩擦力がその動力学に重要であるということが有るが、静止摩擦力を微分演算子の形で書くのは大変に困難であり、まだ誰も成功していない(と思う)。このため、粉体の理解はは流体で例えるとするとNavier-Storkes以前の非常にプリミティブなレベルにあるわけである。

最近の論文に引用されている最古の論文はFaraday[6]の1831年の論文である。この当時は理論というほどのこともなく彼は、対流現象が粉体が振動によって容器の底に空間が出来る際に流れ込む空気の勢いによって対流が引き起こされると考えたようである。しかし、最近では、真空中でも同じ現象が生じることが解ってきたので彼の仮説は誤りであることがわかっている。

その後、戦後から現在にかけて、さまざまな人々が粉体の動力学の研究を行っている。1950年代にはKrollとBagnold[7]が、1960年代には田中[8]らが、また、1970年代には小川[9]らが研究を行っている。最近では、Haff[10]とSavage[11]の研究がある。Haffの研究は粉体を流体として近似するものであり、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \vec{u} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

及び、非弾性衝突による散逸項と速度に依存する非線形な粘性率を伴うNavier-Sorkes方程式よりなっている。これらの方程式系よりシェアのかかった際の速度場などを導出しているが、いまひとつ仮定に正当性が感じられない。一方、Savageは10年弱に渡って粉体の動力学を実験的研究を含めて研究した。彼は、一般的な物理量ψの輸送方程式を

$$\frac{\partial}{\partial t} < n\psi > = n < D\psi > -\nabla \cdot < n\vec{c}\psi > + C(\psi)$$

という形に仮定した。ここに右辺の各項は各々速度変化による項、輸送項、衝突による変化量を表わす項であるが。$C(\psi)$はBoltzmann方程式的に散乱断面積と二体の分布関数によっ

て与えられる。この方程式を摂動的に解くことにより一応対流解を得るのであるが、二体の分布関数を一体の Boltzmann 分布の積で近似する上に「温度」なるものが導入される。
以上、2つの理論の是非はともあれ、粉体の動力学の本質であると思われる静止摩擦の効果が考慮されていないのがなんとも残念である。そこで、次章では、静止摩擦の項がどのような効果をもたらすのかを簡単な数値モデルで、見ることにする。

§4. 自分のモデルの説明。

ここでは、次の2つを粉体の動力学の特徴と見なすことにより粉体の対流運動を説明する簡単なモデルを構成する。その特徴とは

(1) エネルギーの散逸がとても大きいこと。: 流体などでは、外力がゼロになった後もしばらく運動が継続するが粉体の運動の場合には外力を切るのと殆ど同時に運動が静止する。つまり、慣性が無視できて系の時間変化の速度が外力に比例するような状態にあると見なせる。

(2) 静止摩擦力の効果が重要。: 粉体は準安定状態において表面が有限の傾きを持つ斜面を形成することが出来る。これは、まさに静止摩擦力の効果に他ならず、この有限の斜面を形成できるということが後に見るようにこのモデルで対流が生じ得る理由となっている。

以上の2点を満たすために、ここで、鉛直面内に置かれた三角格子上の格子気体モデルを採用することにする。まず、三角格子の採用により準安定状態で表面が有限の斜度をもったスロープを形成できるようになる。(図3) 更に、動力学を鉛直振動の外力に対応するように定義する。

Step.1 振動によって加速されている時間を表す。

三角格子上の格子気体であるから本来ならば6方向にホップすることが出来るのであるが、下方からの加速を受けていることを表現するために、右上方及び、左上方にのみホップできるとする。(図4) そして、左上方にホップする確率を、P_1、右上方にホップする確率を P_2 とする。$1-P_1-P_2$ を静止している確率とする。これを物理的な状況として翻訳すると次の

様に考えることが出来る。P_1とP_2を各々ベクトルとみなし、$\vec{P}_{ex} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ なるベクトル$\vec{P}$を導入する。そして、$P_1 \neq P_2$なる場合まで一般化し、$\vec{P}_{ex}$が鉛直方向となす角θ_{ex}を外力の方向の鉛直方向からずれを表わすとする。本研究の態度としては斜面の形成を動的な相転移として捕らえたいので、P_{ex}を増大させると、ある臨界値をこえるとともに、斜面の形成が始まるというようにしたい。この際、この相転移は自発的な対称性の破れであった方が多体問題としておもしろいので、磁気的相転移との類推を用いれば、P_{ex}が温度(の逆数?)に対応し、θ_{ex}が外場に対応するというアナロジーが可能かもしれない。

ここで、上記の(1)の条件を取り入れるために、加速が無いときは粒子の移動もない、と見なす。つまり、慣性を無視して、力がかかっているときだけ粒子が動くと見なす。従って、P_{ex}は振動の加速の大きさに対応する。また、粒子は空いている格子点にしか移動できない。自分の行きたいところがしめられている場合には妨害している粒子が動いてくれるまで待たなくてはならない。これもまた、粉体の動力学の特徴といえよう。

Step.2 落下時間を表現する。

振動が下向きの位相を持っているときの状態に対応する。不安定な位置にある粒子は安定な位置に到達するまで、落ち続ける。全ての粒子が完全に落ち切って始めて次のStepが開始される。

以上、2つのStepを一組で1Stepとみなし、これを繰り返す。

実際に行ったシミュレーションは横幅30格子点、初期深さ20格子点の系の大きさで、完全に平らな表面から出発し、最初の900Stepを過渡期と見なして捨て、次の3000Stepで平均することにより、様々な値を計算した。

結果は以下のとおりである。

○しかるべき経過時間の後、スロープが形成される。形成されたスロープは定常的に維持され、傾きθ_{slope}は一定の値をとる。(典型的なスナップショットを図5に示す.)

○スロープはほぼ直線である。(図6に平均されたスロープのプロファイルを示した。)

○θ_{slpoe}はθ_{ex}及びP_{ex}の増大とともに一様に増大する。θ_{ex}が小さいほど、θ_{slope}はP_{ex}の増大と共に、素早く増大する(図7)。この事実を楽観的にとらえれば、十分小さなθ_{ex}に対してもP_{ex}が十分大きければθ_{slope}が有限の値を取るのではないか、と見ることも出来る。しかし、残念なことに、このモデルでは、今のところ、自発的対称性のやぶれ($\theta_{ex}=0$でも、θ_{slope}が有限の値を取る。)は観測できなかった。モデルの改良が必要であろう。

○「下り」方向の流れは表面付近に強く局在する。(図8)

○対流の成因: 以上をまとめるとこのモデルにおける対流の成因は次の様に考えられる。まず、外力のわずかな異方性により、粉体の水平方向の移動が生じる。この流れが、壁によって遮られることにより、スロープが生じる。更に、スロープの頂上より漏れだした粉体粒子がふもとに転げ落ちることによりスロープ表面に外力の異方性によって生じるのとは逆方向の流れが生じる。この両方の流れが釣り合うことにより、スロープが維持され、また、定常的な対流が生じる。

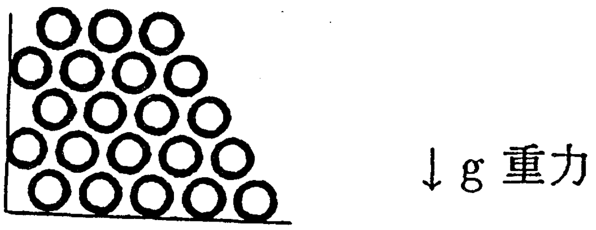

図3

有限のスロープが可能。

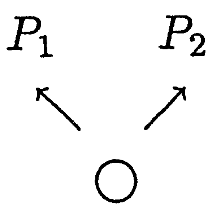

図4

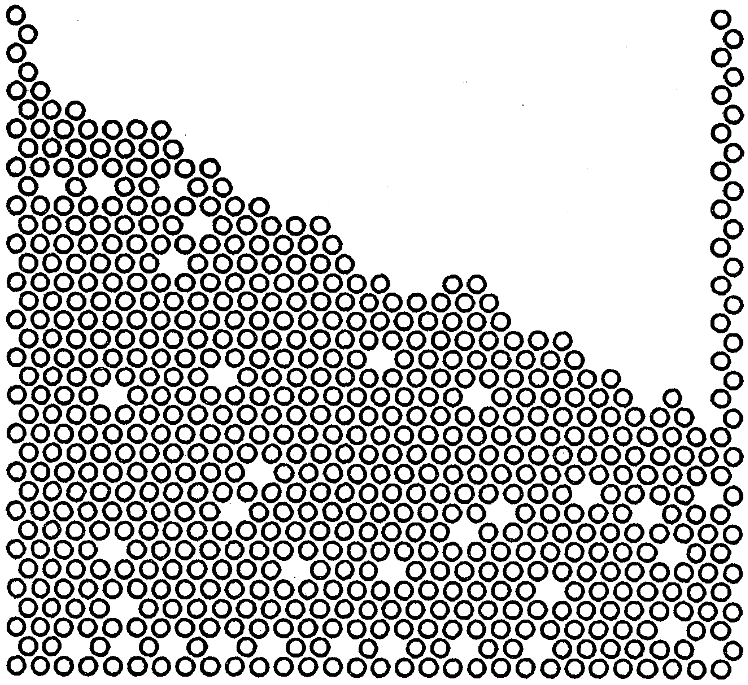

図5

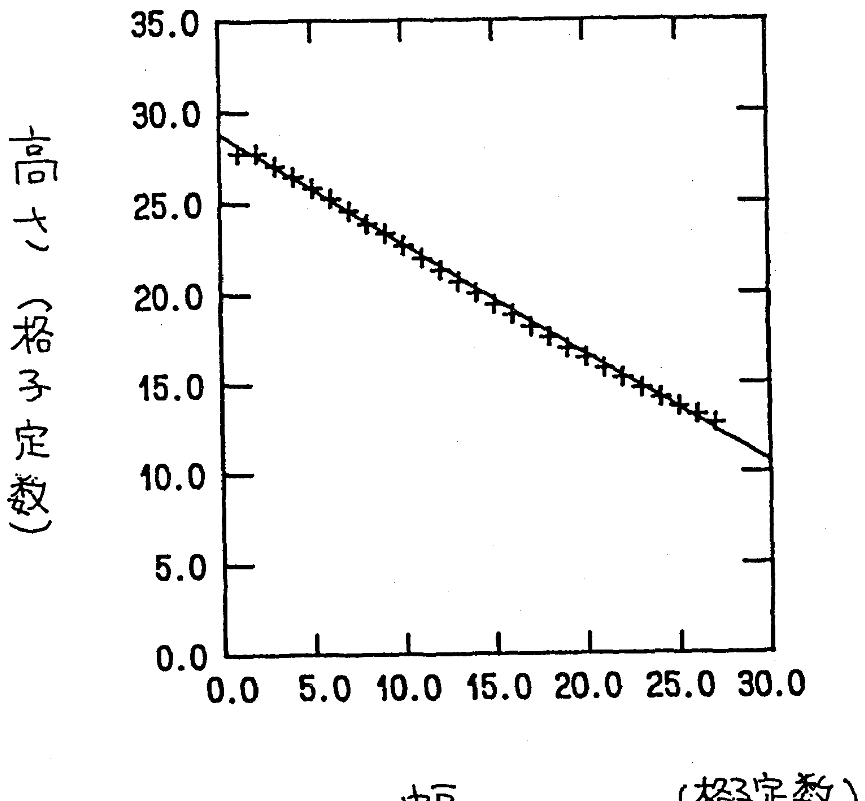
35.0
30.0
25.0
20.0
15.0
10.0
5.0
0.0
0.0
5.0
10.0
15.0
20.0
25.0
30.0
高さ（格子定数）
幅
（格子定数）

図6

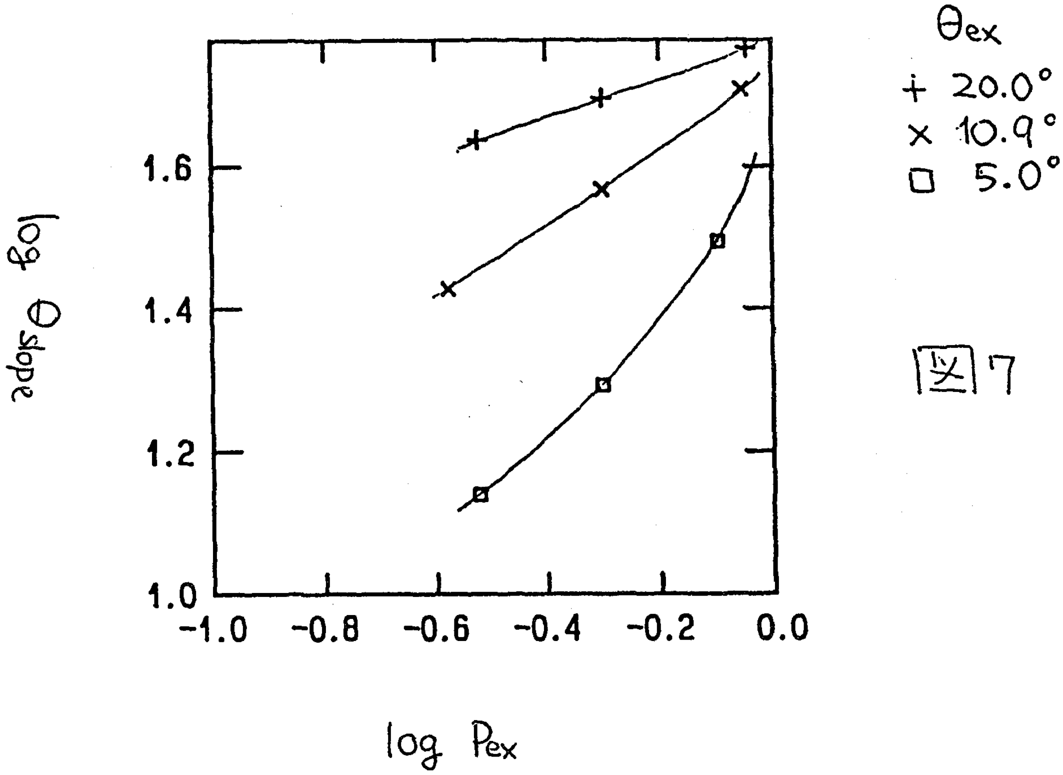

図7

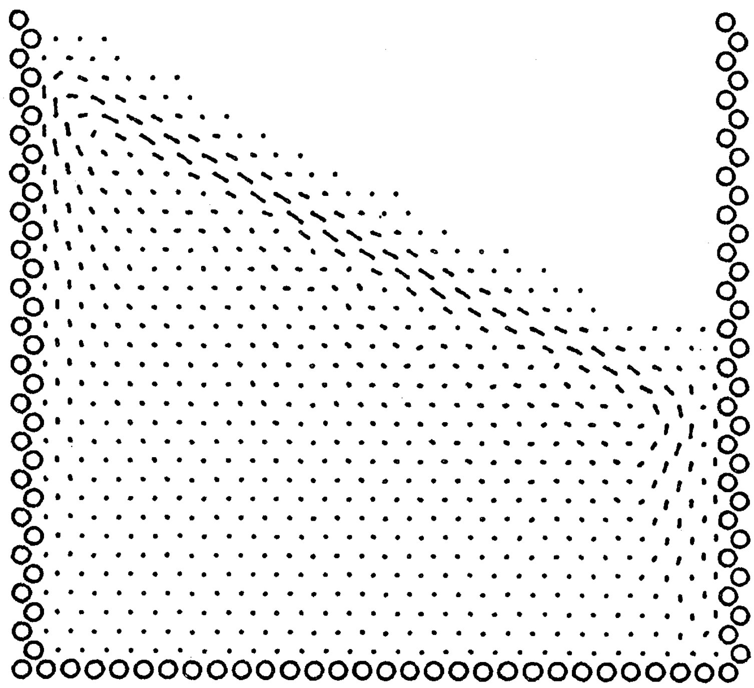

図8

§5. まとめと展望

粉体の動力学を簡単にシミュレーションするための格子モデルを提案した。その結果、スロープの形成、対流の発生などを再現することに成功した。しかし、以下のような問題点もある。

1. 真ん中が盛り上がる場合を再現できない。
2. モデルのパラメーター P_{ex} と現実のパラメーターである振動の加速度との関係が不明解。
3. 外力の対称性が破れていない限り、系の対称性も破れないので、自発的対称性の破れ(動的相転移)が観測されない。
4. スロープが外力に対して正の応答をする領域しか観測されていない。(実験では、外力を増大させてもスロープが増大しない領域(応答がゼロ)や、外力を増大させるとスロープが減少する領域(応答が負)も観測されている。)

これからやることとしては、

A. 対数緩和や、表面流体化現象が観測されるかどうか調べる。

B. 3次元に計算を拡張する。

C. もう少し物理的な課程を考慮して真の動的相転移が観測されるようにする。

などがある。いずれにせよ、古くて新しい問題である粉体の動力学は静止摩擦力というしきい値的な物理量が重大な役目を果たすという意味で微分方程式では扱いにくい新しい問題である。数値計算手段が日進月歩の発展をとげている現代にふさわしい問題であるともいえる。Faraday のような前世紀の知的巨人が頭を悩ませた問題で、我々20 世紀の人間が解明できることというのはそうはないと思うのだが。

References

1) P.Evesqu and J.Pajchnbach, PRL, Vol.62 (1989) p44

2) C.Laroche, S.Douady and S.Fauve, J. Phys. (Paris), Vol.50, (1989) p699

3) H.M.Jeager, Chu-heng Liu and Sidney R. Nagel, PRL, Vol.62 (1989) p40

4) T.A.J.Duke, G.C.Barker and A. Mahta, Europhys. Lett., Vol. 13, (1990) p19

5) P.Evesqu, E. Szmatula and J.P.Denis, Europhys. Lett. Vol.12, (1990) p623

6) M.Faraday, Phil. Trans. R. Soc. Lond. Vol.52, (1831) p299

7) W.Kroll, Chem. Ingr. Tech. Vol.27, (1955) p33; R.A.Bagnold, Proc. R. Soc. Lond. A, Vol.225, (1954) p49

8) A.Suzuki, H.Takahashi and T.Tanaka, Powder Technol. Vol.2 (1968/9) p65; H.Takahashi, A.Suzuki and T.Tanaka, ibid. p78

9) S.Ogawa , A.Umehara and N.Oshima, Z. angew. Math. Phys., Vol.31, (1980) p483

10) P.K.Haff, J. Fluid. Mech., Vol.134, (1983) p401

11)S.B.Savage and D.J.Jeffrey, J.Fluid. Mech., Vol.110, (1981) p255 ; J.T.Jenkins and S.B.Savage, J. Fluid. Mech., Vol.130, (1983) p187 ; S.B.Savage, J. Fluid. Mech., Vol.194, (1988) p457